平 成 30 年 度 入 学 試 験 問 題（後期）

数　　　学

注　　意

1. 合図があるまで表紙をあけないこと。
2. 問題右頁とその裏は計算に使用する。
3. 受験票は机上に出しておくこと。

数　学（後　期）

〔1〕 中心が原点O，半径が2の球面をSとする。S上の4点

$$\mathrm{A}(-\sqrt{2},\ 0,\ \sqrt{2}),\ \mathrm{B}(\sqrt{2},\ 0,\ \sqrt{2}),\ \mathrm{C}(0,\ \sqrt{2},\ \sqrt{2}),\ \mathrm{D}(p,\ q,\ r)$$

を頂点とする四面体ABCDを考える。

(1) $\angle\mathrm{ABD}$が直角のときpの値を求めよ。

(2) (1)の条件が成り立ち，さらに四面体ABCDの体積が$\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$のとき，点Dの座標を求めよ。

〔2〕 △ABCの辺AB上の点Pと辺AC上の点Qについて，$\dfrac{\mathrm{AP}}{\mathrm{AB}}=x$，$\dfrac{\mathrm{AQ}}{\mathrm{AC}}=y$とする。直線PQは△ABCの重心Gを通るとする。

(1) x，yの満たす関係式を求め，xがとりうる値の範囲を求めよ。

(2) 面積の比の値$\dfrac{\triangle\mathrm{APQ}}{\triangle\mathrm{ABC}}$がとりうる範囲を求めよ。

〔3〕 m，nを自然数とする。

(1) 2^n+1が平方数となるようなnをすべて求めよ。ただし平方数とは自然数の2乗で表される整数のことである。

(2) $m=nk$（kは奇数）とする。このとき，2^m+1は2^n+1で割り切れることを示せ。

〔4〕 関数$f(x)$，$g(x)$は微分可能で，連続な導関数$f'(x)$，$g'(x)$をもち，次の式を満たすとする。

$$f(x)=g(x)-\int_0^x g'(t)f(t)\,dt$$

(1) $h(x)=f(x)e^{g(x)}$とすると，$h'(x)=g'(x)e^{g(x)}$であることを示せ。

(2) $g(x)=-x^2$のとき$f(x)$を求めよ。

(3) $f(x)=-x^2$のとき$g(x)$を求めよ。

〔5〕 ●を記した札が4枚，○を記した札が10枚ある。これら14枚を袋に入れてよくかき混ぜてから1枚ずつ取り出して横一列に並べる。この14枚の札の並び方において，左端から7番目までの7枚の札の中に●が丁度2個あるという事象をP，どの2つの●の間にも2個以上の○があるという事象をQとする。

(1) 4枚の●と10枚の○の計14枚の札の，異なる並び方の総数を求めよ。ただし札は，記された●または○以外の区別はできないとする。

(2) Pが起こる確率を求めよ。

(3) $P\cap Q$が起こる確率を求めよ。